

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОБИТИЯ ТОНКИХ ПРЕГРАД

DOI: 10.17223.978-5-7511-2582-0/4

С.В. Пашков

Во многих задачах разрушения фрагментация является существенно вероятностным процессом, который определяется стохастическим характером распределения неоднородностей внутренней структуры материала. Описан вероятностный подход, позволяющий в достаточно простой форме, практически без усложнения модели и дополнительных экспериментов моделировать структурные неоднородности материала. С использованием экспериментальных данных и результатов численного моделирования показано, что введение в модель материала всего одного дополнительного параметра (дисперсии распределения прочностных свойств) позволяет на любом масштабном уровне моделирования структуры придать процессу трещинообразования вероятностный характер, что соответствует теоретическим представлениям и экспериментальным данным. Начальные неоднородности и дефекты структуры материала моделируются тем, что прочностные характеристики материала распределяются по выбранному закону распределения по ячейкам расчетной области. Показано, что на количество и размер «лепестков» при пробитии тонких преград влияют скорость ударника и прочностные характеристики преграды.

Ключевые слова: вероятностный подход, дефекты структуры, динамическое разрушение, высокоскоростной удар, лепесткование.

PROBABILISTIC APPROACH IN MODELING DYNAMIC FRACTURE PROBLEMS

S.V. Pashkov

In many fracture problems, fragmentation is essentially a probabilistic process, which is determined by the stochastic nature of the distribution of inhomogeneities of the internal structure of material. The probabilistic approach is described, which allows to model structural heterogeneities of the material in a simple form, practically without complication of the model and additional experiments. Using experimental data and numerical simulation results, it is shown, that the introduction of only one additional parameter (dispersion of the strength properties distribution) into the material model makes it possible to give a probabilistic character to the crack formation process at any scale level, which corresponds to theoretical concepts and experimental data. Distribution of materials strength characteristics (according to the selected distribution law) in the cells of the computational domain is used for initial heterogeneities and materials structure defects modeling. It is shown that the number and size of the "petals" at the penetration of thin barriers depend of the speed of the projectile and the strength characteristics of the barrier.

Keywords: probabilistic approach, material structure defects, dynamic fracture, high-velocity impact, petaling.

Введение. При численном моделировании процессов динамического взаимодействия деформируемых твердых тел во многих случаях возникает необходимость не только оценить риск повреждения тела, но и достоверно предсказать характер разрушения, размер и форму образующихся фрагментов. Однако для большинства таких задач фрагментация является существенно вероятностным процессом, который определяется стохастическим характером распределения неоднородностей внутренней структуры материала [1]. Особенно наглядно это проявляется для осесимметричных задач, например, разрушения оболочек вращения или цилиндрических контейнеров при взрывном нагружении [2–4]. Несмотря на симметричность условий нагружения, в процессе взаимодействия происходит локализация деформаций на неоднородностях структуры материала. При этом вблизи растущих трещин образуется зона релаксации напряжений, зависящая от скорости деформаций и определя-

ющая характерный размер фрагмента. При взаимодействии ударников с преградами локализация деформаций также существенно влияет на характер разрушения и может приводить к появлению радиальных трещин (для хрупкоразрушающихся материалов) или образованию «лепестков» на тыльной стороне относительно тонкой пластичной преграды.

Долгое время вероятностный подход при решении подобных задач ограничивался аналитическими зависимостями параметров осколочного спектра от скорости деформации, определяемых моделью Мотта и её вариантами, предложенными Грэди, Гилварри и другими исследователями [1]. Большое количество исследователей при моделировании процессов разрушения [3, 5–7] опираются в той или иной мере на подход Мотта, который, по сути, является развитием упрощённой одномерной модельной задачи, что делает его недостаточно обоснованным и трудно применимым в практическом плане для определения осколочного спектра или поля скоростей фрагментов реальных конструкций, разрушаемых взрывом. В настоящее время развитие компьютерных технологий делает наиболее перспективным подход, позволяющий при численном моделировании разрушения учесть неоднородность внутренней структуры тела путём распределения физико-механических характеристик, отвечающих за прочность [2–4, 6, 7]. Более того, штатная возможность задания распределения структурных неоднородностей уже включена в некоторые распространённые программные комплексы, предназначенные для расчёта разрушения [7].

Описываемый в данной статье вероятностный подход позволяет моделировать структурные неоднородности материала в задачах разрушения, тем самым повышая точность, снимая ограничения классического подхода и решая их в наиболее приближенной к реальности постановке. Данная методика позволяет в достаточно простой форме, практически без усложнения модели материала, моделировать влияние начальных неоднородностей и дефектов структуры на характер динамического разрушения твёрдых тел. Предлагаемый подход применим ко всем материалам и не требует специальных экспериментов для предварительного исследования их структуры.

Вероятностный подход к моделированию структурных неоднородностей. Учет реальной внутренней структуры материалов при численном моделировании не может являться решением проблемы вероятностного характера разрушения, так как в большинстве случаев эта структура не известна и её определение представляет собой отдельную, весьма трудоемкую задачу. Несмотря на то, что направление по изучению и моделированию внутренней структуры тел достаточно популярно (так называемый многоуровневый подход), оно применяется, в основном, при решении задач определения эффективных (усредненных) характеристик материалов со сложной структурой, в лучшем случае на участке, соизмеримом с представительным объёмом. Для задач, моделирующих разрушение реальных объектов, подобный подход практически неприменим, так как требует и проведения серьезных исследований внутренней структуры, и создания работоспособной, достаточно сложной её модели для численного моделирования, и чрезмерного уровня детализации сетки (что замедляет расчет и предъявляет завышенные требования к вычислительным ресурсам).

Более того, сама по себе информация о реальной внутренней структуре не гарантирует вероятностный характер разрушения, так как распределение неоднородностей является стохастическим даже в структурированных материалах типа композитов, и внутренняя структура реального тела имеет неоднородности на разных уровнях (микро-, мезо-, макро-).

Основным препятствием для вероятностного характера трещинообразования при классическом подходе к моделированию является то, что в структуре материала отсутствуют неоднородности, в реальной ситуации обеспечивающие образование микротрещин и локальную релаксацию напряжений в прилегающем объёме на более ранних этапах деформирования. Следовательно, для придания процессу вероятностного характера, приближенного к реальности, распределение прочностных характеристик по объёму образца должно обеспечивать некий разброс предельных состояний материала, при которых начинается локализация деформаций или образование микротрещин. При этом информация о реальной внутренней структуре становится избыточной и даже для композитов при численном моделировании становится возможным использовать эффективные значения физико-механических и прочностных характеристик.

При численном моделировании задач фрагментации, вне зависимости от того, используется сеточный метод или бессеточный (например, метод SPH [8]), материал представлен дискретными параметрами, привязанными к узлам и ячейкам расчетной области. Поэтому для моделирования неоднородностей структуры необходимо внести определенные возмущения в распределение тех параметров модели материала, которые отвечают за прочностные характеристики и определяют инициирование и развитие разрушения. В описываемом подходе предлагается распределять предел текучести и предельное значение параметра поврежденности, которое используется в качестве критерия разрушения. Если используемая модель накопления и роста поврежденности не предполагает явной связи между выбранными параметрами, то их распределения считаются независимыми, поскольку они зависят от разных дефектов структуры (например, дефекты на межзеренной границе могут препятствовать пластическим деформациям, но в то же время приводить к более раннему образованию микротрещин).

Вопрос выбора закона распределения (нормальное, экспоненциальное, распределение Вейбулла и прочие многопараметрические распределения) для описываемого вероятностного подхода может вызвать дискуссию, однако численные эксперименты с разрушением толстостенных цилиндрических оболочек [2] показали, что на формирование осколочного спектра дисперсия начального распределения прочностных свойств оказывает более сильное влияние, чем его форма, что снижает требования, предъявляемые к выбору закона распределения, и позволяет в аналитических и численных расчетах с одинаковым успехом использовать практически любой унимодальный закон. Это согласуется с данными [4] о том, что результаты численного моделирования не очень чувствительны к выбору закона распределения. Определяющее влияние дисперсии распределения вполне согласуется с теоретическими представлениями – реализоваться в макротрещины смогут не все неоднородности и дефекты структуры, а лишь те, чье отклонение от среднего значения превышает определенную величину.

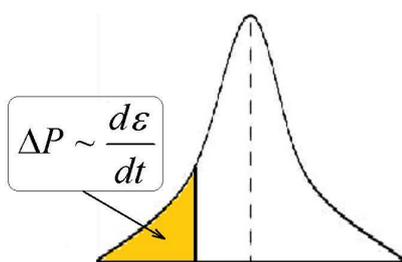


Рис. 1. Участок функции распределения предельных значений, определяющий размер фрагментов, ограничен и зависит от скорости деформации

Другими словами, формирование осколочного спектра для конкретной задачи определяется ограниченным участком (рис. 1) функции распределения предельных значений. Ширина этого участка зависит от скорости деформации и определяется исходя из условия распространения волн разгрузки (от первых микротрещин) на весь объём разрушаемого образца. В дальнейшем происходит локализация деформаций, рост и слияние трещин, и вид функции распределения на оставшемся диапазоне уже практически не влияет на крупную фракцию осколочного спектра.

В настоящее время для задания начальных неоднородностей при численном моделировании общепринятым считается использование двухпараметрического распределения Вейбулла, вытекающее из степенной «функции катастроф» в теории Мотта. Несмотря на это, многие исследователи явно или косвенно признают недостаточную обоснованность такого подхода и необходимость подбора параметров распределения для лучшего соответствия эксперименту. На наш взгляд, поскольку речь идет о неоднородностях на микроуровне, на их распределение влияет большое количество относительно независимых параметров, что фактически является определением нормального закона распределения в теории вероятности. Поэтому предлагается использовать нормальное (гауссовское) распределение как более обоснованное теоретически и удобное для моделирования в отличие от работ [3, 5–7], в которых используется распределение Вейбулла.

Варианты распределения Вейбулла, используемые для описания распределения предельных значений, обычно очень близки к нормальному закону, однако использование двух параметров, не имеющих явного физического смысла, может привести к потенциальным ошибкам. Кроме того, стоит отметить, что генераторы, выдающие случайную величину, подчиняющуюся распределению Вейбулла, не особо распространены, и, возможно, это сдерживает многих исследователей от применения вероятностного подхода. Использование нормального распределения, генераторы случайных чисел для которого широко распространены для любого языка программирования, значительно упрощает задачу.

Задание начальных неоднородностей. Разброс какой-либо величины описывается нормальным гауссовским распределением (1) в том случае, когда на данную величину влияет большое количество случайных независимых параметров. Большинство локально распределённых случайных величин в природе удовлетворяют этому требованию и, как правило, в аналитических и численных расчетах могут быть с достаточной степенью точности считаться распределёнными нормально.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1)$$

где x_0 – математическое ожидание; σ – среднеквадратичное отклонение; σ^2 – дисперсия.

Поскольку нормальное распределение определено на $(-\infty, \infty)$, в практических приложениях требуется ограничить интервал, исключив области, вероятность попадания в которые близка к нулю. Многие исследователи ограничивают интервал распределения, исходя из «правила трёх σ », но в инженерных расчётах часто используется [2] другой вариант записи нормального закона распределения (2), позволяющий явно выделить область 50 %-ной вероятности:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\rho}{E\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\rho^2(x-x_0)^2}{E^2}}, \quad (2)$$

где $E = \rho\sqrt{2}\sigma$, $\rho \approx 0.477 = \text{const}$.

В интервал $[x_0 - E; x_0 + E]$ попадает 50 % случайных величин, в интервал $[x_0 - 2E; x_0 + 2E]$ – около 82 %, в интервал $[x_0 - 3E; x_0 + 3E]$ – около 96 %, в интервал $[x_0 - 4E; x_0 + 4E]$ – более 99 %. В силу этого на практике, как правило, для распределения случайных величин по нормальному закону используют «практический интервал» $[x_0 - 4E; x_0 + 4E]$.

При отсутствии привязки к эксперименту используется, как правило, средне-квадратичное отклонение, соответствующее 10-процентному практическому интервалу (3). При этом 99 % значений случайной величины попадают в интервал $\pm 10\%$ от номинального значения $x \in [x_0 - 0.1x_0; x_0 + 0.1x_0]$ или, другими словами, $4E = 0.1x_0$. Таким образом, использование нормального закона для распределения позволяет достаточно легко и математически обоснованно выделить интересующий интервал и исключить нефизические значения случайных величин.

$$\sigma = \frac{0.1x_0}{4\sqrt{2}\rho}. \quad (3)$$

Моделирование динамического разрушения с использованием вероятностного подхода. Рассмотрим предлагаемый вероятностный подход более подробно на примерах моделирования пробития тонких преград. Пробитие тонких преград из относительно пластичных материалов, как правило, сопровождается лепесткованием – несмотря на исходную симметричность задачи, края отверстия получаются рваными, загнутыми и имеют форму отдельных «лепестков». Количество «лепестков» в общем случае зависит от скорости соударения и прочностных характеристик материала. Несмотря на равномерность и симметричность нагружения, в реальности достаточно быстро начинается локализация деформаций на неоднородностях структуры. При этом вблизи растущих трещин образуется зона разгрузки, зависящая от скорости деформации и определяющая характерный размер «лепестка».

С использованием программного комплекса PS300, разработанного в НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета, в лагранжевой постановке на тетраэдрической сетке было проведено численное моделирование задачи о пробитии тонкого металлического диска ударником оживальной формы. Диск диаметром 26.4 см и толщиной 2.3 мм жестко закреплён по краям. Ударник оживальной формы и диаметром 6.6 см считался абсолютно жестким, что, впрочем, не играет особой роли, так как преграда слишком тонкая и массивный ударник почти не деформируется. Для описания повреждённости использовался критерий разрушения по максимальным деформациям. При выполнении в окрестности узла критерия разрушения происходило образование новой контактной поверхности с использованием метода расщепления разностной сетки по узлам [9].

На рис. 2 на примере результата численного моделирования задачи пробития тонкого диска ударником оживальной формы наглядно показано, как с изменением параметров эксперимента меняется число «лепестков». Для медного диска принято: предел текучести ≈ 200 МПа; относительное удлинение при разрыве ≈ 0.563 . Для стального диска принято: предел текучести ≈ 940 МПа; относительное удлинение при разрыве ≈ 0.2 .

В рамках описываемого вероятностного подхода считалось, что каждая ячейка имеет независимое значение предельной пластической деформации и предела текучести. Для придания процессу разрушения вероятностного характера для преграды было выполнено начальное распределение физико-механических характеристик, отвечающих за прочность предельных деформаций и предела текучести. Они распределялись по ячейкам расчётной области с помощью модифицированного генератора случайных чисел, выдающего случайную величину, распределённую по нормальному закону (1) с математическим ожиданием x_0 , соответствующим табличному значению, и дисперсией, соответствующей 10 %-му практическому интервалу [2].

Для предельных деформаций дисперсия распределения вычислялось как (4), для предела текучести – как (5).

$$\sigma^2 = \left(\frac{0.1 \varepsilon_{\max}}{4\sqrt{2}\rho} \right)^2, \quad (4)$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{0.1[\sigma]_{\text{тек}}}{4\sqrt{2}\rho} \right)^2. \quad (5)$$

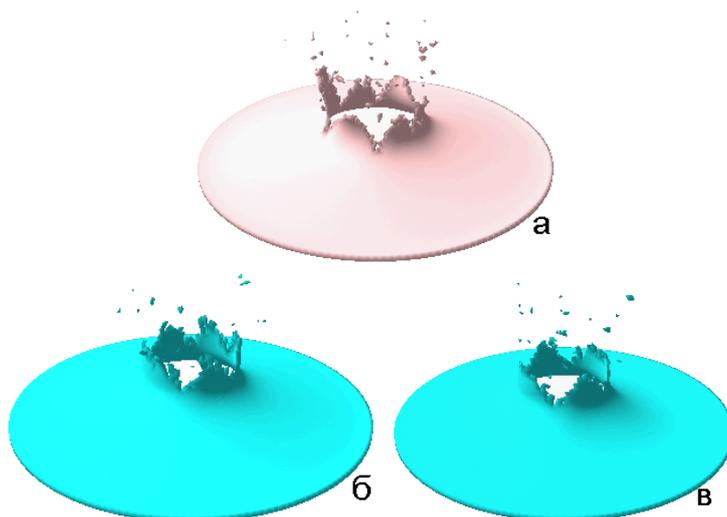


Рис. 2. Пробитие тонкого диска жёстким ударником оживальной формы:
a – стальной диск, скорость ударника 300 м/с, 6 «лепестков»; *б* – медный диск, скорость ударника 300 м/с, 5 «лепестков»; *в* – медный диск, скорость ударника 150 м/с, 4 «лепестка»

Стальной диск (рис. 2, *a*), благодаря меньшей пластичности, имеет меньше времени на локализацию повреждённости на начальных дефектах структуры и меньше времени на разгрузку при возникновении трещины, поэтому при одинаковой скорости ударника 300 м/с имеет большее число «лепестков», чем медный диск (рис. 2, *б*). Для медного диска расчёт был произведён при разной скорости ударника. При уменьшении скорости ударника до 150 м/с (рис. 2, *в*), увеличивается время на локализацию повреждённости и разгрузку при возникновении трещины, зона разгрузки (и соответственно размер осколка) увеличивается, поэтому число «лепестков» уменьшается до четырёх.

Данные результаты показывают, что предложенный вероятностный подход позволяет даже в геометрически осесимметричной задаче описать локализацию деформаций на дефектах структуры, обеспечить лепесткование, наблюдаемое в экспериментах, и подтвердить зависимость числа «лепестков» от скорости ударника и пластических свойств преграды.

С целью верификации используемого подхода было выполнено сравнение экспериментальных данных с результатами численного моделирования.

На рис. 3, *а* представлен результат эксперимента по пробитию тонкой металлической преграды, проведенного в НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета на легкогазовой пушке [10]. Пластина толщиной 1.7 мм изготовлена из сплава АМгб, используемого в составе защитных экранов космических аппаратов. Алюминиевый сферический ударник диаметром 9 мм, имитирующий микрометеороид, разогнался до скорости порядка 800 м/с. Эксперимент показывает характерные рваные края и достаточно большой (по сравнению с размерами ударника) размер отверстия, обусловленный расплющиванием алюминиевого шарика во время пробития.

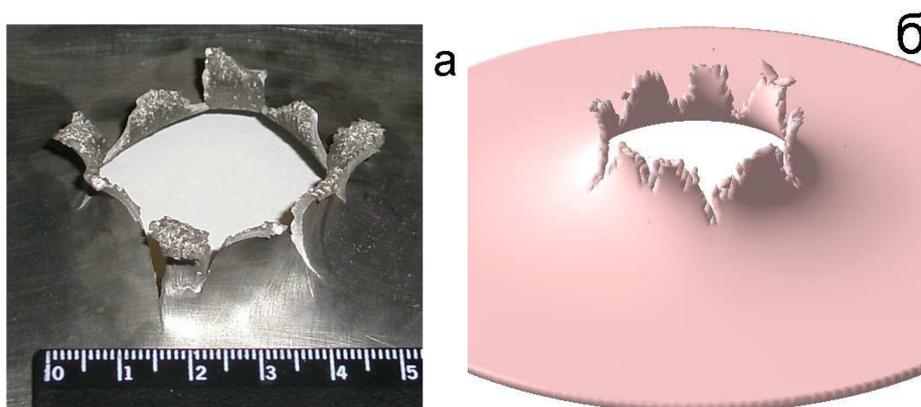


Рис. 3. Пробитие пластины толщиной 1.7 мм из сплава АМгб алюминиевым сферическим ударником диаметром 9 мм, скорость соударения порядка 800 м/с; *а* – эксперимент; *б* – численное моделирование

В данном расчёте также применялся вероятностный подход в виде начального распределения предела текучести и предельных деформаций по нормальному закону. Использование вероятностного подхода для данной задачи показало хорошее совпадение экспериментальных данных с результатами численного моделирования как по числу «лепестков», так и по их форме.

Влияние дисперсии распределения прочностных свойств на характерный размер фрагмента. Описанный вероятностный подход может с успехом применяться не только для моделирования лепесткования, но и для других задач, где разрушение носит стохастический характер, когда трещинообразование сильно зависит от скорости деформации и локализации поврежденности на дефектах структуры и внутренних неоднородностях. Например, взрывное разрушение толстостенных оболочек [11–12]. Учитывая, что описываемый подход предполагает введение в модель материала дополнительного параметра (дисперсии прочностных свойств), представляет интерес исследование влияния дисперсии прочностных свойств на характерный размер фрагмента и осколочный спектр.

Данные расчетов по моделированию взрывного разрушения оболочек показывают [2], что увеличение дисперсии прочностных свойств приводит к увеличению в спектре относительной доли средних и крупных осколков и к уменьшению максимума, вызванного осколками мелкой фракции, в связи с чем средний размер осколка увеличивается. Максимальный размер осколка также имеет тенденцию к увеличению, что приводит к возрастанию числа осколков, содержащих в себе участки обеих начальных поверхностей (внутренней и внешней). Это объясняется тем, что с увеличением дисперсии увеличивается число крупных дефектов, которые реализуются в микротрещины на начальных этапах разрушения, причем разгрузка от вновь образованных поверхностей уменьшает опасность реализации более мелких дефектов.

В то же время следует понимать, что для некоторых задач увеличение дисперсии с определенной величины перестает существенно влиять на осколочный спектр. Это объясняется тем, что при высоких скоростях деформации локализация повреждений начинает проявляться лишь при определенном количестве микротрещин.

При рассмотрении данной модели может возникнуть вопрос обоснованности привязки дефектов структуры к сетке и оценки влияния размера ячейки на результирующий осколочный спектр, ведь при изменении размеров ячейки пространственное распределение начальных неоднородностей будет принципиально меняться. Этот момент достаточно подробно анализировался и были сделаны следующие выводы. Выбранный шаг сетки, по сути, определяет уровень моделируемой структуры, в то же время на любом уровне есть распределенные реальные неоднородности, которые являются спусковыми механизмами и инициируют образование микротрещин. На атомарном уровне неоднородностями являются дислокации и прочие дефекты кристаллической решетки. При более укрупнённом анализе в качестве дефектов выступают зерна и межзеренные границы. При макроанализе неоднородностями являются уже микротрещины и другие относительно крупные концентраторы напряжений. Таким образом, подход с распределением прочностных характеристик применим для любого размера ячейки, однако, как и в любом другом алгоритме, использующем сеточную аппроксимацию, размер ячейки должен быть достаточным для обеспечения необходимой точности (в данном случае – точности определения осколочного спектра).

Для большинства задач дальнейшее уменьшение шага сетки вызывает рост числа осколков мелкой фракции, однако не приводит к заметному изменению осколочного спектра в координатах «масса по массе», так как основная роль начальных неоднородностей – концентрация напряжений при образовании первых микротрещин, а размер осколка, по сути, определяется скоростью деформации. Тем не менее не исключено, что в задачах дробления хрупких материалов (очень чувствительных к выбору модели разрушения) уменьшение шага сетки может приводить к изменению осколочного спектра и в части крупных осколков. Общие рекомендации здесь – уточнять дисперсию распределения для данного уровня моделирования структуры, используя привязку к эксперименту.

Заключение. С использованием экспериментальных данных и результатов численного моделирования показано, что введение в модель материала всего одного дополнительного параметра (дисперсии распределения прочностных свойств) позволяет на любом масштабном уровне моделирования структуры придать процессу трещинообразования вероятностный характер, что соответствует теоретическим представлениям и экспериментальным данным. Предложенный вероятностный подход может использоваться при любом шаге сетки и на любом уровне многоуровневого моделирования, обеспечивая распределение неоднородностей характерного размера. Это позволяет повысить точность расчетов и снять ограничения классиче-

ского подхода к численному моделированию задач разрушения, решая их в наиболее приближенной к реальности постановке. В рамках данного подхода лишь вносятся стохастический фактор, поэтому не требуется специальных экспериментов для предварительного исследования структуры материала. Подход может применяться при использовании любых моделей материала и критериев разрушения.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-19-10264).

Литература

1. Наймарк О.Б., Уваров С.В., Давыдова М.М., Банникова И.А. Многомасштабные статистические закономерности динамической фрагментации // Физическая мезомеханика. 2017. Т. 20, № 1. С. 94–105.
2. Пашков С.В. Влияние распределения дефектов структуры на осколочный спектр при моделировании взрывного разрушения толстостенных цилиндрических оболочек // Труды ТГУ. Серия физико-математическая. 2018. Т. 302.
3. Lambert D.E., Weiderhold J., Osborn J., Hopson M.V. Explosively driven fragmentation experiments for continuum damage modeling // Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME. 2012. Vol. 134, Issue 3, 031209.
4. Diep Q.B., Moxnes J.F., Nevstad G. Fragmentation of projectiles and steel rings using 3D numerical simulations // Proc. 21th Int. Symp. on Ballistics, 19–23 April 2004, Adelaide, Australia, 2004. P. 752.
5. Elek P., Jaramaz S. Modeling of fragmentation of rapidly expanding cylinders // Theoretical and Applied Mechanics. 2005. Vol. 32, Issue 2. P. 113–130.
6. Meyer H.W., Brannon R.M. A model for statistical variation of fracture properties in a continuum mechanics code // International Journal of Impact Engineering. 2012. Vol. 42. P. 48–58.
7. James G. Rasico, Craig A. Newman, Morten Rikard Jensen. Modeling fragmentation of a 155 mm artillery shell IED in a buried mine blast event // International Journal of Vehicle Performance. 2018. Vol. 4, No. 4. P. 323–346.
8. Cherepanov R. O., Gerasimov A. V. First order accuracy conservative smooth particle method for elastic-plastic flows with contacts and free surfaces // AIP Conference Proceedings. 2016. Vol. 1783, Issue 1. P. 020024-1–020024-4.
9. Высокоскоростной удар. Моделирование и эксперимент / под ред. А.В. Герасимова. Томск: Изд-во НТЛ, 2016. Разд. 4.2.3: Описание фрагментации при численном моделировании разрушения твёрдых тел.
10. Герасимов А.В., Добрица Д.Б., Пашков С.В., Христенко Ю.Ф. Теоретико-экспериментальное исследование способа защиты космических аппаратов от высокоскоростных частиц // Космические исследования. 2016. Т. 54, № 2. С. 126–134.
11. Герасимов А.В., Пашков С.В. Фрагментация толстостенных упругопластических оболочек при взрывном нагружении // Химическая физика. 2002. Т. 21, № 9. С. 34–36.
12. Герасимов А.В., Пашков С.В. Моделирование естественного дробления твердых тел при ударных и взрывных нагружениях // Химическая физика. 2005. Т. 24, № 11. С. 1–7.

References

1. Naimark O.B., Uvarov S. V., Davydova M. M., Bannikova I. A. Multiscale statistical laws of dynamic Fragmentation // Physical Mesomechanics, 2017, Vol. 20. Issue 1. P. 90–101.
2. Pashkov S.V. Effect of material structure defects distribution on the fragmentation spectrum in the simulation of explosive destruction of thick-walled cylindrical shells // Proceedings of Tomsk state University. Tomsk: Tomsk State University, 2018, Vol. 302. P. 204–211.
3. Lambert D.E., Weiderhold J., Osborn J., Hopson M.V. Explosively driven fragmentation experiments for continuum damage modeling // Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME, 2012, Vol. 134, Issue 3, 031209.
4. Diep Q.B., Moxnes J.F., Nevstad G. Fragmentation of projectiles and steel rings using 3D numerical simulations // Proc. 21th Int. Symp. on Ballistics, 19–23 April 2004, Adelaide, Australia, 2004. P. 752.

5. *Elek P., Jaramaz S.* Modeling of fragmentation of rapidly expanding cylinders // *Theoretical and Applied Mechanics*, 2005, Vol. 32, Issue 2. P. 113–130.
6. *Meyer H.W., Brannon R.M.* A model for statistical variation of fracture properties in a continuum mechanics code // *International Journal of Impact Engineering*, 2012, 42, p. 48–58.
7. *James G. Rasico, Craig A. Newman, Morten Rikard Jensen.* Modeling fragmentation of a 155mm artillery shell IED in a buried mine blast event // *International Journal of Vehicle Performance*, 2018, Vol.4, No.4. P. 323–346.
8. *Cherepanov R. O., Gerasimov A. V.* First order accuracy conservative smooth particle method for elastic-plastic flows with contacts and free surfaces // *AIP Conference Proceedings*, 2016, Vol.1783. Issue 1. P. 020024-1–020024-4.
9. *Gerasimov, A.V. Ed.*, 2016. High-speed impact. Modelling and experiment. Tomsk: Scientific and Technical Literature Publishing House, pp: 568. Section 4.2.3. Description of fragmentation in solids fracture numerical simulation.
10. *Gerasimov A.V., Dobritsa D.B., Pashkov S.V., Khristenko Y.F.* Theoretical and experimental study of a method for the protection of spacecraft from high-speed particles // *Cosmic Research*, 2016, 54(2). C. 118–126.
11. *Gerasimov A.V., Pashkov S.V.* Fragmentation of thick-walled elastoplastic shells during explosion loading // *Khimicheskaya Fizika*, 2002, Vol. 21, No. 9. P. 34–36.
12. *Gerasimov A.V., Pashkov S.V.* Modelling the natural crushing of solid bodies during shock and explosion loading // *Khimicheskaya Fizika*, 2005, Vol. 24. No. 11. P. 1–7.